International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)
ISSN 2367-7775 ©IJCDM
Volume 9, 2024, pp. 484-493.
Received October 26, 2024. Published on-line December 31, 2024.
web: http://www.journal-1.eu/
©The Author(s) This article is published with open access[1].

Three Circles that Concur at the Feuerbach Point

Benjamin Lee Warren[a] [2]
University of Binghamton, Mathematics,
4400 Vestel Pkwy E, Binghamton, NY 13902
e-mail: warrenbenjamin52@yahoo.com
web: https://orcid.org/0000-0002-2829-6953

Mathematics Subject Classification (2010). 51N20.

1. Introduction

We demonstrate the existence of several notable figures in a construction as formed in [1].

2. Results

Theorem 2.1. *Let A, B, and C be the vertices of a given triangle.*
Let D be the point on line AC, with $\angle CAB = \angle DAB$, such that $AD = AB$.
Let E be the point on line AB, with $\angle CAB = \angle CAE$, such that $AE = AC$.
Let F be the point on line BC, with $\angle CBA = \angle FBA$, such that $BF = AB$.
Let G be the point on line AB, with $\angle CBA = \angle CBG$, such that $BG = BC$.
Let H be the point on line BC, with $\angle ACB = \angle ACH$, such that $CH = AC$.
Let I be the point on line AC, with $\angle ACB = \angle ICB$, such that $CI = BC$.
Let S be the nine point center of triangle AFH.
Let T be the nine point center of triangle BDI.
Let U be the nine point center of triangle CEG.
Then,
1. The nine point circles of triangles AFH, BDI, and CEG are concurrent at the Feuerbach point of triangle ABC,
2. The nine point circles of triangles AFH, BDI, and CEG intersect the incircle and the nine point circle of triangle ABC at the feet of the altitudes of triangle ABC and the points forming the intouch triangle of triangle ABC, and

[1]This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License which permits any use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and the source are credited.
[2]Corresponding author

3. Triangle STU is homothetic to triangle ABC about the point X(79).

Proof. Without loss of generality, we will work in Cartesian coordinates.
A has coordinates $(0, 0)$.
B has coordinates $(1, 0)$.
C has coordinates (x_C, y_C).
D has coordinates $(\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}, \frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}})$.
E has coordinates $(\sqrt{x_C^2+y_C^2}, 0)$.
F has coordinates $(\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1, \frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})$.
G has coordinates $(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}, 0)$.
H has coordinates $(x_C+\frac{(1-x_C)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}, y_C*(1-\frac{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}))$.
I has coordinates $(x_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}), y_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))$.
S has coordinates
$((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))), (-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))$.
T has coordinates
$((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))), (-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))$.
U has coordinates
$(\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4}, \frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})$.

1. The incircle of triangle ABC is given by the equation
$(x-\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})^2+(y-\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})^2-((\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})^2)=0$.
The nine point circle of triangle ABC is given by the equation
$(x-\frac{1}{2}x_C-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{y_C^2-x_C^2+x_C}{4y_C})^2-((\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_C)^2+(\frac{y_C^2-x_C^2+x_C}{4y_C})^2)=0$.
The Feuerbach point of triangle ABC has coordinates
$(-(x_C/2-4*(x_C/2+1/4)^2+((2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2+(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-2*x_C^2+2*x_C+2*y_C^2)-y_C^2*(4*x_C+2))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+((x_C+1/2)*(-x_C^2+x_C+y_C^2)-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+1)+(2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-x_C^2+x_C+y_C^2)^2)/(2*y_C^2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))+1/4)/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2), ((y_C*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2-4*(x_C/2+1/4)*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-x_C+1/2)+1))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((2*x_C-(2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-1)*(-x_C^2+x_C+y_C^2))/(4*$

$y_C))/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2))$
$=$
$((8*a*d^2-8*b*c*d-8*a*b*d+4*c^2+8*b^2*c-4*a^2*c-4*a*c-c+a*(4*a^2+1))/(8*((d-b)^2+(c-a)^2)), -((2*a-1)*(4*c-2*a-1)*d-b*(4*(c*(2*c-2*a-1)+a^2)+1))/(8*((d-b)^2+(c-a)^2)))$
where
$a=\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}$,
$b=\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}$,
$c=(1/2)x_C+1/4$, and
$d=\frac{y_C^2-x_C^2+x_C}{4y_C}$, (this comes from solving the system $(x-a)^2+(y-b)^2-b^2=0, (x-c)^2+(y-d)^2-(1/2-c)^2-d^2=0$ and averaging the solutions).
The nine point circle of AFH is given by the equation
$(x-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+(y-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2-(((\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2)=0.$

The nine point circle of BDI is given by the equation
$(x-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+(y-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2-(((\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2)=0.$
The nine point circle of CEG is given by the equation
$(x-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2+(y-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2-$
$(((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/2-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2$
$+(y_C/2-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2)=0.$

We verify that the Feuerbach point lies on all three circles since we calculate that
$((-(x_C/2-4*(x_C/2+1/4)^2+((2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2+(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-2*x_C^2+2*x_C+2*y_C^2)-y_C^2*(4*x_C+2))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+((x_C+1/2)*(-x_C^2+x_C+y_C^2)-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+1)+(2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+$

$$y_C^2)^{1/2}))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-x_C^2+x_C+y_C^2)^2)/(2*y_C^2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))+1/4)/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+(((y_C*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2-4*(x_C/2+1/4)*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-x_C+1/2)+1))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((2*x_C-(2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-1)*(-x_C^2+x_C+y_C^2))/(4*y_C))/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2-(((\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2))^2=0,$$

$$(-(x_C/2-4*(x_C/2+1/4)^2+((2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2+(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-2*x_C^2+2*x_C+2*y_C^2)-y_C^2*(4*x_C+2))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+((x_C+1/2)*(-x_C^2+x_C+y_C^2)-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+1)+(2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-x_C^2+x_C+y_C^2)^2)/(2*y_C^2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))+1/4)/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+(((y_C*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2-4*(x_C/2+1/4)*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-x_C+1/2)+1))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((2*x_C-(2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-1)*(-x_C^2+x_C+y_C^2))/(4*y_C))/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2-(((\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2)=0,$$

and

$$(-(x_C/2-4*(x_C/2+1/4)^2+((2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2+(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-2*x_C^2+2*x_C+2*y_C^2)-y_C^2*(4*x_C+2))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+((x_C+1/2)*(-x_C^2+x_C+y_C^2)-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((4*(x_C+$$

$(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2+1)+(2*x_C+1)*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(-x_C^2+x_C+y_C^2)^2)/(2*y_C^2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))+1/4)/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2+(((y_C*((4*(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})^2)/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)^2-4*(x_C/2+1/4)*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-x_C+1/2)+1))/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-((2*x_C-(2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))*((2*x_C+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)-1)*(-x_C^2+x_C+y_C^2))/(4*y_C))/(8*(x_C/2-(x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1)+1/4)^2+8*((-x_C^2+x_C+y_C^2)/(4*y_C)-y_C/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))^2)-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2-(((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/2-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2+(y_C/2-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2)=$
0 as desired.

2. The fact that the nine point circles of triangle AFH, BDI, and CEG intersect the points that form the intouch triangle follows from the result proven in [1] which states that the midpoints of $EG, DI,$, and FH form the intouch triangle. The feet of the altitudes of ABC have coordinates $(x_C, 0), (\frac{x_C^2}{x_C^2+y_C^2}, \frac{x_C y_C}{x_C^2+y_C^2})$, and $(\frac{y_C^2}{(x_C-1)^2+y_C^2}, \frac{y_C(1-x_C)}{(x_C-1)^2+y_C^2})$.
We verify that the foot $(x_C, 0)$ lies on the nine point circle of CEG since we calculate
$(x_C-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2+(-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2-$
$(((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/2-\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4})^2$
$+(y_C/2-\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C})^2)=0,$
we verify that the foot $(\frac{x_C^2}{x_C^2+y_C^2}, \frac{x_C y_C}{x_C^2+y_C^2})$ lies on the nine point circle of BDI since we calculate
$(\frac{x_C^2}{x_C^2+y_C^2}-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+(\frac{x_C y_C}{x_C^2+y_C^2}-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2-(((\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))^2)=0,$
and we verify that the foot $(\frac{y_C^2}{(x_C-1)^2+y_C^2}, \frac{y_C(1-x_C)}{(x_C-1)^2+y_C^2})$ lies on the nine point circle of AFH since we calculate
$(\frac{y_C^2}{(x_C-1)^2+y_C^2}-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+(\frac{y_C(1-x_C)}{(x_C-1)^2+y_C^2}-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*$

$((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2-(((\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1)/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})/2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))^2)=0$
as desired.

3. To show that triangles ABC and STU are homothetic, we will show that they are similar and in perspective. We verify that they are similar since we calculate that
$(\frac{ST}{TU})^2-(\frac{AB}{BC})^2=\frac{(x_S-x_T)^2+(y_S-y_T)^2}{(x_T-x_U)^2+(y_T-y_U)^2}-\frac{1}{(x_C-1)^2+y_C^2}$
$=(16*(((y_C^2*(2*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2)+x_C^2+2*x_C^3+(x_C^2-2*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^2)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(4*(x_C^2+y_C^2))-(y_C^2*(2*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)+(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2+y_C^2-1)-3*x_C^2+2*x_C^3+1)/(4*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)))^2+((x_C*y_C^2+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^3-x_C^2+x_C*y_C^2+y_C^2)+x_C^3-x_C^4+y_C^4-(y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*y_C^2+x_C^3)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2))-(x_C-y_C^2*(x_C-1)-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1))/(4*y_C*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)))^2))/((4*(x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+y_C^2*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2)/(x_C^2+y_C^2)^2+(4*y_C^2*((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-1)^2)/(x_C^2+y_C^2))-1/(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)=0$
and
$(\frac{ST}{SU})^2-(\frac{AB}{AC})^2=\frac{(x_S-x_T)^2+(y_S-y_T)^2}{(x_S-x_U)^2+(y_S-y_U)^2}-\frac{1}{x_C^2+y_C^2}$
$=(((x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1))/(4*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2))-((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2*(x_C-1)+y_C^2*(x_C+1))+x_C*y_C^2+x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C*y_C^2+x_C^3-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C)*(x_C-y_C)))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2)))^2+((y_C^2*(2*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-2))+x_C^2+2*x_C^3+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C*(x_C-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})+y_C^2))/(4*x_C^2+4*y_C^2)+(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-x_C^2-y_C^2+1)+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)-y_C^2*(2*x_C+1)+3*x_C^2-2*x_C^3-1)/(4*(x_C-1)^2+4*y_C^2))^2)/((x_C/2+(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-x_C^2-y_C^2+1)+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)-y_C^2*(2*x_C+1)+3*x_C^2-2*x_C^3-1)/(4*(x_C-1)^2+4*y_C^2)+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/4+1/4)^2+(((x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-1)-y_C^2)/(4*y_C)+(x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1))/(4*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)))^2)-1/(x_C^2+y_C^2)=0.$
Line AS is given by the equation
$y=x*(((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))/((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2)))))).$

Line BT is given by the equation
$y = (x-1)*(((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))/((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2)))-1))$.
Line CU is given by the equation
$y = y_C + (x - x_C)$
$*((\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C}-y_C)/(\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4}-x_C))$.
Consider the point $X(79)$ whose coordinates are given by $((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^3+x_C-1)-y_C^4*(x_C-1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+x_C^2-5*x_C^3+3*x_C^4-y_C^4+y_C^2*(2*x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2+x_C^3-5*x_C^4+3*x_C^5)-x_C^2+6*x_C^4-8*x_C^5+3*x_C^6-y_C^6+y_C^2*(x_C-1)*(5*x_C^3-x_C^2+x_C-1)+x_C*y_C^4*(x_C+2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(-y_C^2+x_C*(3*x_C+1))*(x_C-1))/(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2)), ((y_C^2*(x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(x_C-1))+(x_C*(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2)*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2+x_C^3)*(x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1)))/(2*y_C*(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2))))$.
We verify that this point lies on all three lines since we calculate
$((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^3+x_C-1)-y_C^4*(x_C-1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+x_C^2-5*x_C^3+3*x_C^4-y_C^4+y_C^2*(2*x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2+x_C^3-5*x_C^4+3*x_C^5)-x_C^2+6*x_C^4-8*x_C^5+3*x_C^6-y_C^6+y_C^2*(x_C-1)*(5*x_C^3-x_C^2+x_C-1)+x_C*y_C^4*(x_C+2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(-y_C^2+x_C*(3*x_C+1))*(x_C-1))/(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2)))*(((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C+1)*(y_C+x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+(x_C-2)*y_C^2+x_C^3-2*x_C^2+x_C)-(x_C-1)*(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^4+(x_C-1)*y_C^2+x_C^4-3*x_C^3+3*x_C^2-x_C)/(4*y_C*(y_C^2+(x_C-1)^2))))/((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(2*(x_C-1)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2-x_C^2+1)+(y_C^2+(x_C-1)^2)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3+3*x_C^2-1)/(4*(y_C^2+(x_C-1)^2)))))-(((y_C^2*(x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(x_C-1))+(x_C*(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2)*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2+x_C^3)*(x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1)))/(2*y_C*(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2))))=0$,
$((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^3+x_C-1)-y_C^4*(x_C-1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+x_C^2-5*x_C^3+3*x_C^4-y_C^4+y_C^2*(2*x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2+x_C^3-5*x_C^4+3*x_C^5)-x_C^2+6*x_C^4-8*x_C^5+3*x_C^6-y_C^6+y_C^2*(x_C-1)*(5*x_C^3-x_C^2+x_C-1)+x_C*y_C^4*(x_C+2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(-y_C^2+x_C*(3*x_C+1))*(x_C-1))/(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*$

$x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2))-1)*(((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*((y_C-x_C)*(y_C+x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})+x_C*y_C^2+x_C^3)-y_C^4-((x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C+1)*y_C^2+(x_C-1)*x_C^2)-x_C*y_C^2+x_C^4-x_C^3)/(4*y_C*(y_C^2+x_C^2))))/((-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C*(2*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C)-y_C^2)+(y_C^2+(x_C-2)*x_C)*((x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(2*x_C+1)*y_C^2-2*x_C^3-x_C^2)/(4*(y_C^2+x_C^2)))-1))-(((y_C^2*(x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(x_C-1))+(x_C*(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2)*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2+x_C^3)*(x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1)))/(2*y_C*(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2)))) = 0,$

and

$y_C+((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^3+x_C-1)-y_C^4*(x_C-1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+x_C^2-5*x_C^3+3*x_C^4-y_C^4+y_C^2*(2*x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2+x_C^3-5*x_C^4+3*x_C^5)-x_C^2+6*x_C^4-8*x_C^5+3*x_C^6-y_C^6+y_C^2*(x_C-1)*(5*x_C^3-x_C^2+x_C-1)+x_C*y_C^4*(x_C+2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(-y_C^2+x_C*(3*x_C+1))*(x_C-1))/(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2))-x_C)*((\frac{y_C^2+(-x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})}{4y_C}-y_C)/(\frac{2x_C+1+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}}{4}-x_C))-(((y_C^2*(x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(x_C-1))+(x_C*(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-y_C^2)*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2+x_C^3)*(x_C-y_C^2*(x_C-1)-3*x_C^2+3*x_C^3-x_C^4+y_C^4-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C^2*(x_C-2)-2*x_C^2+x_C^3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C+y_C-1)*(y_C-x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C-1)))/(2*y_C*(y_C^4*(5*x_C-1)+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(6*x_C^2-6*x_C+1)+5*x_C^2-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C+y_C^2*(5*x_C-4)-10*x_C^2+5*x_C^3))-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+y_C^2*(x_C-1)*(10*x_C^2-6*x_C+1)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(5*x_C-5))*((x_C-1)^2+y_C^2)))) = 0$

as desired. □

REFERENCES

[1] Warren, B.L., "Three Congruent Circles, Six Parallel Lines, X(104), and a New Construction of the Intouch Triangle", *International Journal of Computer Discovered Mathematics*, Under Review.

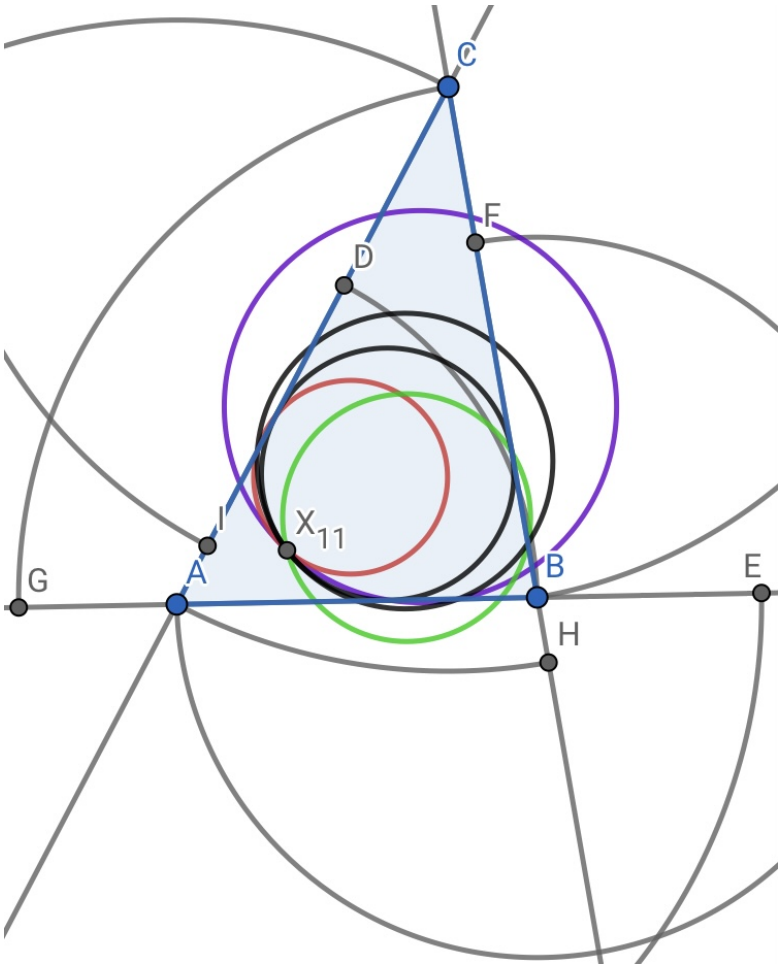

Figure 1. The nine point circles of triangles AFH, BDI, and CEG (in green, red, and purple respectively) are concurrent at the Feuerbach point of triangle ABC.

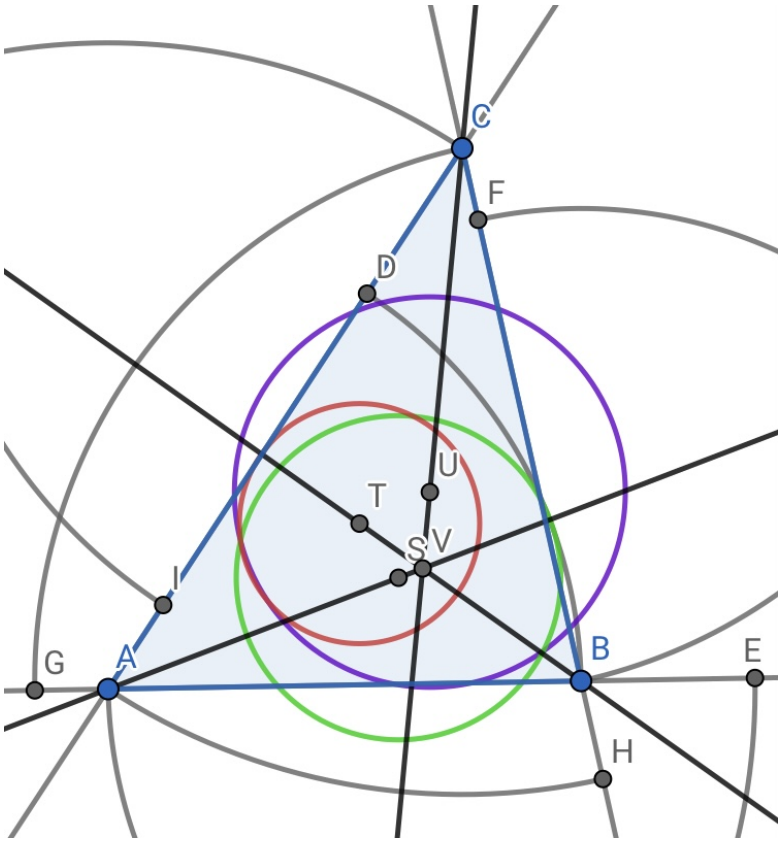

FIGURE 2. Triangles ABC and STU are homothetic about $X(79)$ (labled V).